DOI:10.13338/j.issn.1674-649x.2012.03.002

西 安 工 程 大 学 学 报
Journal of Xi'an Polytechnic University
第26卷第3期(总115期) 2012年6月 Vol. 26, No. 3(Sum. No. 115)

文章编号:1674-649X(2012)03-0367-03

关于 Smarandache 可求和因数对问题

李 玲

(陕西工业职业技术学院 基础部,陕西 咸阳 712000)

摘要:对任意正整数 n,设 $d(n)$ 表示 n 的 Dirichlet 除数函数,即就是 n 的所有不同正因数的个数.著名的 Smarandache 可求和因数对问题是指:是否存在无穷多个正整数 m 及 n,使得 $d(m)+d(n)=d(m+n)$,其中 $(m,n)=1$.利用初等方法以及著名的陈景润定理研究这一问题,即证明存在无穷多个正整数 m 及 n 且 $(m,n)\leqslant 2$,使得 $d(m)+d(n)=d(m+n)$,其中 (m,n) 表示 m 和 n 的最大公约数.从而将 Amarnath Murthy 及 Charles Ashbacher 提出的一个猜想做出了实质性进展.

关键词:F. Smarandache 可求和因数对; 初等方法; 陈景润定理; 猜想
中图分类号:O 156.4 文献标识码:A

1 引言及结论

对于任意正整数 n,设 $d(n)$ 表示 n 的 Dirichlet 除数函数.即就是 n 的所有不同正因数的个数. 例如 $d(1)=0,d(2)=2,d(3)=2,d(4)=3,d(5)=2,d(6)=4,d(7)=2,d(8)=4,d(9)=3,d(10)=4,d(11)=2,d(12)=6,\cdots$.这一函数在算术函数性质的研究中占有十分重要的位置,它与许多著名的经典数论问题密切相关,因而受到不少数论专家的重视和关注,并取得了不少具有重要理论意义的研究成果[1-6].文献[1]给出渐近式

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+\Delta(x)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}),$$

其中 γ 为 Euler 常数.

文献[2]证明了更强的估计式 $\sum_{n\leqslant x}d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O(x^{7/22}(\ln x)^{89/22})$.

文献[3]研究了误差项 $\Delta(x)$ 的积分均值问题,证明了渐近式

$$\int_0^T\Delta^2(x)\mathrm{d}x=\alpha T^{3/2}+O(T\ln^4T),$$

其中 $\alpha=\frac{1}{6\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2(n)}{n^{3/2}}$.有关函数 $d(n)$ 的进一步性质,可参阅文献[7-8].

另一方面,Amarnath Murthy 及 CharlesAshbacher 在文献[9]中引入了 Smarandache 可求和因数对(SSDP)的概念:即就是一对正整数 m 及 n,它们满足方程 $d(m)+d(n)=d(m+n)$.同时他们提出了下面

收稿日期:2012-03-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194);陕西省教育厅自然科学专项基金资助项目(09JK336)
作者简介:李玲(1977-),女,陕西省咸阳市人,陕西工业职业技术学院讲师.E-mail:liling19962003@163.com

2个猜想：

猜想A　存在无穷多个正整数 m 及 n，它们是Smarandache可求和因数对；

猜想B　对任意正整数 m，是否存在正整数 n，使得 $d(m)+d(n)=d(m+n)$.

关于这2个猜想，至今似乎没有人研究，至少没有在现有的文献中见到!本文认为这2个猜想有一定的意义，它揭示了Dirichlet除数函数在一些特殊整数上的可加性质. 然而，这2个猜想很不严密，事实上如果对整数 m 和 n 不加任何条件限制，那么猜想A非常容易证明. 例如设 p 是任意一个大于5的素数，那么 $8p=3p+5p$，此时显然有恒等式

$$d(8p)=d(8)\cdot d(p)=4\cdot 2=8=4+4=d(3)\cdot d(p)+d(5)\cdot d(p)=d(3p)+d(5p).$$

由于存在无穷多个素数 $p>5$，所以存在无穷多组整数对 $m=3p$ 和 $n=5p$，使得 $d(m)+d(n)=d(m+n)$. 这样便证明了猜想A.

为了使猜想A更加合理，提法更严密，不妨对正整数 m 和 n 增加一些条件限制，

猜想C　存在无穷多个正整数 m 及 n 且 $(m,n)=1$，使得 $d(m)+d(n)=d(m+n)$.

对于猜想C，目前还没有找到合适的证明方法. 不过用著名的陈景润定理可以得到下面的阶段性成果：

定理1　存在无穷多个正整数 m 及 n 且 $(m,n)\leqslant 2$，使得方程 $d(m)+d(n)=d(m+n)$ 成立，其中 $d(n)$ 为 n 的Dirichlet除数函数，(m,n) 表示 m 和 n 的最大公约数.

显然定理1对猜想C做出了实质性进展. 对于猜想B，目前还没有做出任何有意义的工作，因此说它仍然是一个公开的问题. 此外，还可以利用定理1的证明方法处理其他函数，例如函数 $\Omega(n)$，同样可以得到下面的：

定理2　存在无穷多个正整数 m 及 n 且 $(m,n)\leqslant 2$，使得方程 $\Omega(m)+\Omega(n)=\Omega(m+n)$ 成立，其中 $\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因数的个数(包括重数在内).

2　定理的证明

2.1　引理

为方便定理的证明，需要解析数论中著名的陈景润定理，其证明参阅文献[10].

引理1　任意充分大的正整数 $2N$ 一定可以表示成 $2N=p_1+p_2$ 或者 $2N=p_1+p_2p_3$，其中 p_1,p_2 及 p_3 表示3个不同的素数.

2.2　定理1证明

事实上由除数函数 $d(n)$ 的定义知当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$[8,11]. 现在对任意充分大的奇素数 p，由陈氏定理可知一定存在2个不同的素数 p_1 及 p_2，使得

$$4p=p_1+p_2 \tag{1}$$

或者存在3个不同的素数 p_1,p_2 及 p_3，使得

$$4p=p_1+p_2p_3. \tag{2}$$

现在分两种情况讨论：

(1) 当式(1)成立时，有恒等式 $8p=2p_1+2p_2$. 此时，显然 $d(8p)=(3+1)\cdot(1+1)=8$，$d(2p_1)=(1+1)\cdot(1+1)=4$，$d(2p_2)=(1+1)\cdot(1+1)=4$. 从而有恒等式 $d(2p_1)+d(2p_2)=8=d(8p)$. 此时，取 $m=2p_1$，$n=2p_2$，$m+n=2(p_1+p_2)=8p$. 从而有 $(m,n)=2$ 且

$$d(m)+d(n)=d(m+n). \tag{3}$$

(2) 当式(2)成立时，有恒等式 $4p=p_1+p_2p_3$. 此时取 $m=p_1$，$n=p_2p_3$，则 $m+n=p_1+p_2p_3=4p$，$d(m)=d(p_1)=2$，$d(n)=d(p_2p_3)=(1+1)\cdot(1+1)=4$，$d(m+n)=d(4p)=(2+1)\cdot(1+1)=6$ 且 $(m,n)=1$. 从而也有恒等式

$$d(m)+d(n)=d(m+n). \tag{4}$$

对任意充分大的素数 p，显然式(3)或者式(4)至少有一个成立. 因而至少有一组Smarandache可求和对 m 及 n 且 $(m,n)\leqslant 2$，使得 $d(m)+d(n)=d(m+n)$. 再由著名的素数分布定理知素数 p 的个数有无穷多个，从而定理1成立.

2.3　定理2的证明

设 p 是一个充分大的素数. 考虑偶数 $2p^2$. 由陈氏定理知一定存在 2 个不同的素数 p_1 及 p_2, 使得

$$2p^2 = p_1 + p_2 \tag{5}$$

或者存在 3 个不同的素数 p_1, p_2 及 p_3, 使得

$$2p^2 = p_1 + p_2 p_3. \tag{6}$$

仍然分两种情况讨论:

(1) 当式(5) 成立时, 有恒等式 $4p^2 = 2p_1 + 2p_2$. 此时, 显然 $\Omega(4p^2) = 2 + 2 = 4$, $\Omega(2p_1) = 1 + 1 = 2$, $\Omega(2p_2) = 1 + 1 = 2$. 从而有恒等式 $\Omega(2p_1) + \Omega(2p_2) = 4 = \Omega(4p^2)$. 此时, 取 $m = 2p_1$, $n = 2p_2$, $m + n = 2(p_1 + p_2) = 4p^2$. 这时有 $(m, n) = 2$, 而且

$$\Omega(m) + \Omega(n) = \Omega(m + n). \tag{7}$$

(2) 当式(6) 成立时, 有恒等式 $2p^2 = p_1 + p_2 p_3$. 此时取 $m = p_1$, $n = p_2 p_3$, 则 $m + n = p_1 + p_2 p_3 = 2p^2$, $\Omega(m) = \Omega(p_1) = 1$, $\Omega(n) = \Omega(p_2 p_3) = 2$, $\Omega(m + n) = \Omega(2p^2) = 1 + 2 = 3$. 此时显然 $(m, n) = 1$, 而且也有恒等式

$$\Omega(m) + \Omega(n) = \Omega(m + n). \tag{8}$$

对任意充分大的素数 p, 显然式(7) 或者式(8) 至少有一个成立. 因而至少对应一组 Smarandache 可求和对 m 和 n 且 $(m, n) \leqslant 2$, 使得 $\Omega(m) + \Omega(n) = \Omega(m + n)$. 由于存在无穷多个素数 p, 所以定理 2 成立.

参考文献:

[1] DIRICHLET G L. Sur l'usage des séries infinies dans lathéorie des nombres[J]. Crelle's Journal, 1938, 18: 259-274.

[2] HUXLEY M N. Exponential sums and lattice points Ⅲ [J]. Proc London Math Soc, 2003, 87: 591-609.

[3] TONG K C. On divisor problems Ⅱ [J]. Acta Math Sinica, 1956, 6: 139-152.

[4] 朱敏慧. Smarandache 函数的混合均值[J]. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(3): 295-298.

[5] 黄炜. 2 个 Smarandache LCM 函数的混合均值估计[J]. 纺织高校基础科学学报, 2011, 24(3): 390-393.

[6] 杨长恩. 关于 Smarandache 函数的一个方程[J]. 纺织高校基础科学学报, 2010, 23(2): 188-190.

[7] JÓZSEF Sándor, DRAGOSLAV S. Mitrinovi, Handbook of number theory Ⅰ[M]. New York: Springer, 2006.

[8] Apostol T M. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[9] AMARNATH Murthy, CHARLES Ashbacher. Generalized partitions and new ideas on number theory and Smarandache sequences[M]. Phoenix: Hexis, 2005.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[11] 张文鹏, 李海龙. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2008.

On the Smarandache summable divisor pairs

LI Ling

(Department of Basic Course, Shaanxi Polytechnic Institute, Xianyang, Shaanxi 712000, China)

Abstract: For any positive integer n, let $d(n)$ denotes the Dirichlet divisor function. That is, $d(n) = \sum_{d|n} 1$. The Smarandache Summable Divisor Pairs (SSDP) is a positive integer pairs m and n with $(m, n) = 1$ such that $d(m) + d(n) = d(m + n)$, where (m, n) denotes the Greatest Common Divisor of m and n. Using the elementary method and famous Chen Jingrun's theorem, it was proved that there exist infinite positive integer pairs m and n with $(m, n) \leqslant 2$ such that $d(m) + d(n) = d(m + n)$. This made some progress for a conjecture proposed by Amarnath Murthy and Charles Ashbacher.

Key words: the Smarandache summable divisor pairs; elementary method; Chen Jingrun's theorem; conjecture

编辑、校对: 黄燕萍